INHOUD.

HOOFDSTUK I.

Vectoralgebra.

1. *Inleiding.*

De vectoranalyse is een onderdeel van de wiskunde, dat speciaal ontwikkeld is om een uniforme wiskundige beschrijving te geven van klassieke theoretisch-fysische processen. Het blijkt, dat verschillende verschijnselen, zoals stroming van onsamendrukbare vloeistoffen, zwaartekrachtsvelden, electromagnetische velden, beschreven kunnen worden door een gemeenschappelijk wiskundig systeem. Weliswaar is dit systeem ontoereikend om gecompliceerde fysische verschijnselen, zoals elastische en plastische spannings- en vervormingstoestanden, stroming van visceuze vloeistoffen, quantumvelden en de algemene relativiteitstheorie te beschrijven, zonder een grondige kennis echter van de elementaire theorie der eenvoudige verschijnselen wordt de studie van de meer gecompliceerde onmogelijk.
In de vectoranalyse, die als wiskundig substraat optreedt van de genoemde theorieën, zal men voortdurend in enigszins abstracte vorm de fysische begrippen terugvinden. Deze abstracte vorm maakt het juist mogelijk om het gemeenschappelijke van deze verschijnselen te vatten.

2. *Vectoren in de driedimensionale ruimte.*

Wij beschouwen uitsluitend rechthoekige coördinaten x, y en z in de driedimensionale ruimte. De coördinaten vormen een rechtsdraaiend assenstelsel, d.w.z. een draaiing van de x-as naar de y-as zal, volgens de beweging van een rechtsdraaiende schroef (kurketrekker) een verschuiving in de richting van de positieve z-as geven.

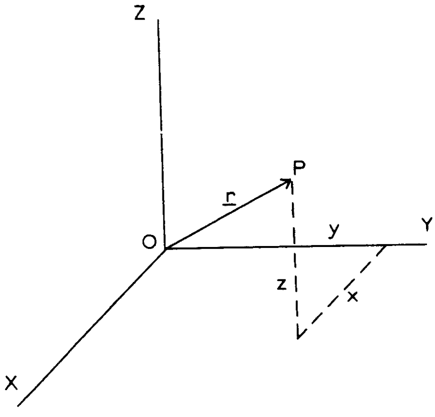

Fig. 1.

Een punt P heeft de coördinaten (x, y, z). Wij definiëren de gerichte voerstraal OP van de oorsprong O naar P als de vector $\mathbf{r}$ met kentallen (componenten) x, y en z.

$$\mathbf{r} = (x, y, z).$$

Dikwijls spreken wij kortweg van het punt $\mathbf{r}$. In het algemeen verstaan wij onder een vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ een gericht lijnstuk, waarvan de projecties op de coördinaatassen de lengten a_1, a_2 en a_3 hebben.
Onder de som van twee vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ verstaan wij de diagonaal van het parallelogram op $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ als zijden beschreven. Men ziet gemakkelijk, dat:

I. $$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

(commutatieve wet van de optelling).

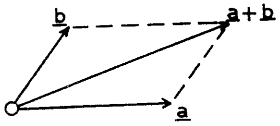

Fig. 2.

Onder het product van een vector $\mathbf{a}$ met een positief getal α verstaan wij de vector $\alpha\,\mathbf{a}$, die dezelfde richting heeft als $\mathbf{a}$ en waarvan de lengte met α is vermenigvuldigd. Is α negatief, dan wordt de richting van $\alpha\,\mathbf{a}$ tegengesteld, de lengte is met $|\alpha|$ vermenigvuldigd. Onder de nulvector $\mathbf{0}$ verstaan wij een vector met lengte 0.
Blijkbaar is:

Ia. $$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

II. $$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\,\mathbf{a} + \alpha\,\mathbf{b}$$

IIa. $$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{a}.$$

Voorts geldt de associatieve wet van de optelling:

III. $$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

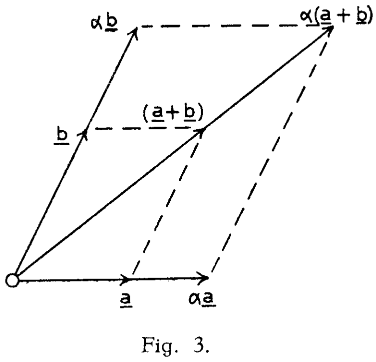

Fig. 3.

Onder de vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ verstaan wij de vector $\mathbf{b} + (-1)\,\mathbf{a}$. Hij is dus gelijk aan de vector, die het beginpunt in $\mathbf{a}$ en het eindpunt in $\mathbf{b}$ heeft.

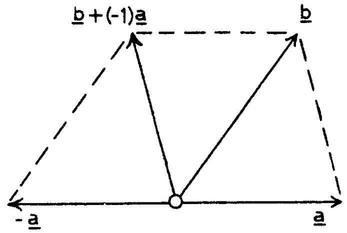

Fig. 4.

De drie vectoren met lengte één langs x-, y- en z-as duiden wij aan met $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ en $\mathbf{k}$. Zij zullen de drie eenheidsvectoren genoemd worden. Zijn de componenten van een vector $\mathbf{a}$ de getallen a_1, a_2 en a_3, dan is:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Voor een punt (x, y, z) geldt dus:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

3. *Vectorvoorstelling van lijn en vlak.*

Is $\mathbf{a}$ een gegeven vector, dan stelt $\mathbf{r} = \lambda\,\mathbf{a}$, waarbij λ alle positieve en negatieve getallen doorloopt, een punt voor, dat een rechte door de oorsprong doorloopt, waarvan de richting door de richtingsvector $\mathbf{a}$ wordt gegeven.

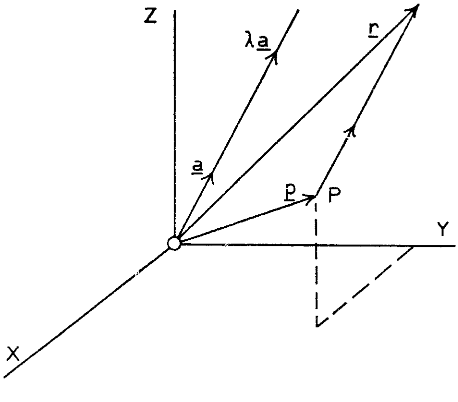

Fig. 5.

De variabele vector $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda\,\mathbf{a}$, waarbij $\mathbf{p}$ vast is, behoort bij de punten van een lijn, die door het punt $\mathbf{p}$ gaat en die evenwijdig is met de vector $\mathbf{a}$.

De lijn door 2 punten **a** en **b** kan worden opgevat als een lijn door **a** met richtingsvector **b** — **a**:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - \lambda)\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{b}.$$

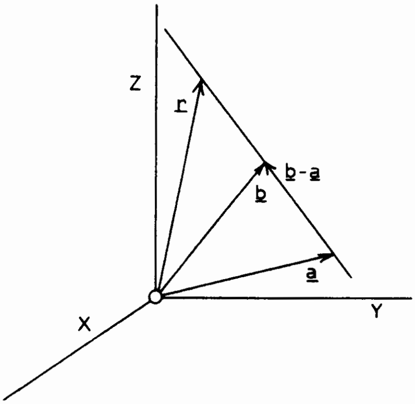

Fig. 6.

Beschouw nu twee vectoren **a** en **b**, die niet dezelfde richting hebben. De variabele vector $\mathbf{r} = \lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b}$, waarbij λ en μ veranderlijke reële getallen zijn, zal alle punten in het vlak, dat door **a** en **b** opgespannen is, doorlopen. Immers, is P een willekeurig punt in het vlak, trek dan lijnen door P evenwijdig met de vectoren **a** en **b**. Deze snijden de voerstralen van **a** en **b** in de punten P_1 en P_2. De vector $\mathbf{OP}_1$ is dan een veelvoud van **a**, de vector $\mathbf{OP}_2$ is een veelvoud van **b**, de vector $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$ is de som van $\mathbf{OP}_1$ en $\mathbf{OP}_2$ en heeft dus de gewenste vorm. Verder zal de constructie voor geen enkele waarde van λ en μ punten buiten het vlak kunnen opleveren. $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ stelt dus een vlak door de oorsprong voor. Wij kunnen dit vlak verschuiven naar een punt **p**, dan stelt $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b}$ een vlak voor, dat door het punt P (met plaatsvector **p**) gaat en evenwijdig is met het eerstgenoemde vlak. Deze voorstelling heet de parametervoorstelling van het vlak.

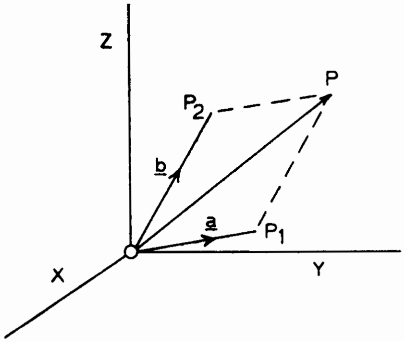

Fig. 7.

Voorbeelden.

1) De parametervoorstelling van een vlak door drie punten **a**, **b** en **c** kan verkregen worden door het vlak op te vatten als een vlak door **a** met richtingsvectoren **b** — **a** en **c** — **a**.

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (1 - \lambda - \mu)\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{b} + \mu\,\mathbf{c}.$$

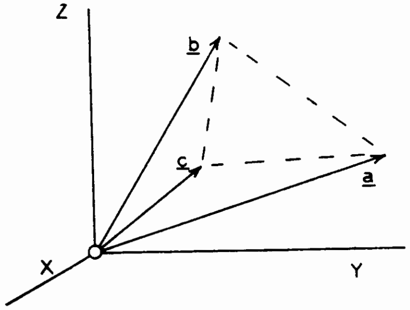

Fig. 8.

2) De rechte door de oorsprong $\mathbf{r} = \lambda\,\mathbf{a}$ zal liggen in het vlak door de oorsprong $\mathbf{r} = \mu\,\mathbf{b} + \nu\,\mathbf{c}$, indien de vector **a** een lineaire combinatie is van **b** en **c**. Dus als er getallen μ_1 en ν_1 bestaan, zodat:

$$\mathbf{a} = \mu_1\mathbf{b} + \nu_1\mathbf{c}.$$

Evenzo zal de rechte $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda\,\mathbf{a}$ evenwijdig zijn met het vlak:

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + \mu\,\mathbf{b} + \nu\,\mathbf{c},$$

als er getallen μ_1 en ν_1 bestaan, zodat:

$$\mathbf{a} = \mu_1\mathbf{b} + \nu_1\mathbf{c}.$$

3) Het vlak door de oorsprong $\mathbf{r} = \lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b}$ zal samenvallen met het vlak $\mathbf{r} = \nu\,\mathbf{c} + \varkappa\,\mathbf{d}$, als **c** en **d** in het eerste vlak liggen, d.w.z. als er getallen λ_1 en μ_1, zowel als λ_2 en μ_2 bestaan, zodat:

$$\mathbf{c} = \lambda_1\,\mathbf{a} + \mu_1\,\mathbf{b} \quad \text{en} \quad \mathbf{d} = \lambda_2\,\mathbf{a} + \mu_2\,\mathbf{b}.$$

4. *Het scalaire product.*

Onder het scalaire product **a** . **b** van twee vectoren **a** en **b** verstaan wij een getal (scalar), dat gegeven wordt door de lengte van de ene vector **a** te vermenigvuldigen met de lengte van de projectie van de tweede vector **b** op **a**.

Is de hoek tussen de twee vectoren φ en duiden wij de lengte aan door a resp. b, dan is:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\, b \cos \varphi.$$

Blijkbaar geldt:

I. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

II. $(\lambda\, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda\, \mathbf{b})$

III. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$

Verder is het scalarproduct van een vector met zichzelf gelijk aan het kwadraat van zijn lengte: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$.
Als twee vectoren **a** en **b** loodrecht op elkaar staan, is $\cos \varphi = 0$ en is dus $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Omgekeerd, als **a** en **b** geen nulvectoren zijn en hun scalaire product is nul, dan staan zij loodrecht op elkaar.
Blijkbaar geldt voor de drie eenheidsvectoren:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

en:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

Het scalaire product van de vectoren:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

en:

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

is nu:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = {} & (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = \\
& = a_1b_1(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + a_1b_2(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + a_1b_3(\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) + \\
& + a_2b_1(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + a_2b_2(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + a_2b_3(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) + \\
& + a_3b_1(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) + a_3b_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) + a_3b_3(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) = \\
& = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.
\end{aligned}$$

De lengte van een vector **a** is nu gegeven door:

$$a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2.$$

Verder geldt voor de hoek tussen twee vectoren **a** en **b**:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a\, b} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}\,\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}}.$$

5. *Het vectoriële product.*

Onder het vectoriële product $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (vectorproduct) van twee vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ verstaan wij het parallelogram op de twee vectoren beschreven.

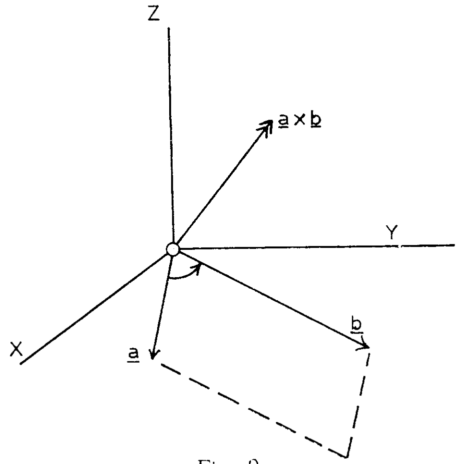

Fig. 9.

De oppervlakte van dat parallelogram is $a\,b \sin \varphi$, als φ de kleinste draaiingshoek van de vector $\mathbf{a}$ naar de vector $\mathbf{b}$ is. Wij kunnen het voorstellen door één enkele vector, gericht langs de lijn loodrecht op het vlak van het parallelogram en wel in de richting, die volgens een rechtsdraaiende schroef behoort bij een draaiing van $\mathbf{a}$ naar $\mathbf{b}$. De grootte is gelijk aan de oppervlakte van het parallelogram. Veranderen wij de draairichting, dan verandert de productvector van teken:

I. $$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Blijkbaar geldt voor vermenigvuldiging met een getal:

II. $$(\lambda\,\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \lambda\,\mathbf{b}.$$

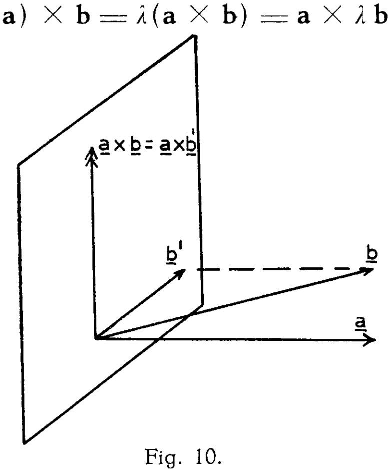

Fig. 10.

Breng nu een vlak aan loodrecht op **a** en laat **b′** de projectie van **b** op dat loodvlak zijn. Dan is *b′* de hoogte van het parallelogram en:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}'.$$

Deze eigenschap gebruiken wij voor het bewijs van de stelling (distributieve wet):

III. $$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

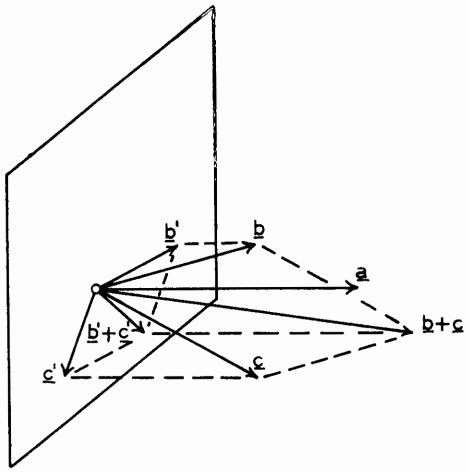

Fig. 11.

Immers, is **b′** de projectie van **b** op het loodvlak op **a** en **c′** de projectie van **c** op het loodvlak, dan is :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}' + \mathbf{a} \times \mathbf{c}'.$$

In het loodvlak staat $\mathbf{a} \times \mathbf{b}'$ loodrecht op **b′** en $\mathbf{a} \times \mathbf{c}'$ staat loodrecht op **c′**, het parallelogram op de twee vectoriële productvectoren is gelijkvormig met het parallelogram op **b′** en **c′**, zodat ook geldt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}' + \mathbf{a} \times \mathbf{c}' = \mathbf{a} \times (\mathbf{b}' + \mathbf{c}').$$

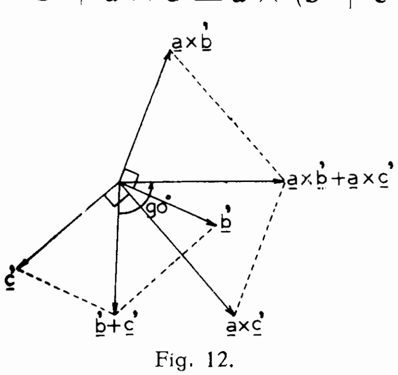

Fig. 12.

Maar $\mathbf{b}' + \mathbf{c}'$ is de projectie van $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ op het loodvlak, zodat:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{b}' + \mathbf{c}'),$$

waarmee de eigenschap bewezen is.
Voor de drie eenheidsvectoren $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ en $\mathbf{k}$ geldt:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= - \mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= - \mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= - \mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0. \end{aligned}$$

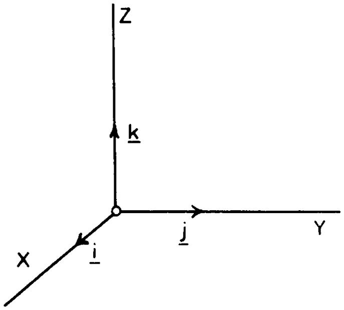

Fig 13.

Is:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad \text{en} \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \end{aligned}$$

dan geeft herhaalde toepassing van de distributieve wet:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = {} & (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = \\ & + a_1b_1(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_1b_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_1b_3(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + \\ & + a_2b_1(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_2b_2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_2b_3(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\ & + a_3b_1(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_3b_2(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_3b_3(\mathbf{k} \times \mathbf{k}), \end{aligned}$$

wat volgens de relaties voor de eenheidsvectoren overgaat in:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}.$$

De kentallen van het vectorproduct kunnen ook geschreven worden als de determinanten uit de matrix:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Blijkbaar zijn zij gelijk aan de oppervlakten van de projecties van het parallelogram op de coördinaatvlakken.

De gevonden uitdrukking is dan juist de ontwikkeling van de determinant:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

6. *Het scalar- en vectortripelproduct.*

Met drie vectoren **a**, **b** en **c** kunnen op verschillende wijzen producten gevormd worden. $(\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b})\mathbf{c}$ is een vector met de richting van **c**, welks lengte met het getal $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}$ is vermenigvuldigd. Het scalartripelproduct wordt verkregen als scalaire product van de vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ met de vector **c**:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c}.$$

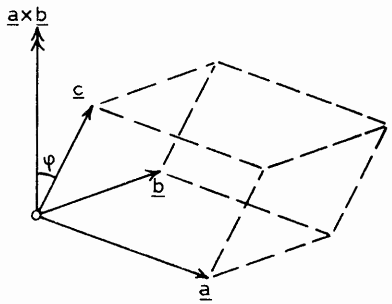

Fig. 14.

Meetkundig stelt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ een vector voor loodrecht op het parallelogram van **a** en **b**, het scalaire product met **c** geeft tot resultaat een vermenigvuldiging met de projectie van **c** op die loodlijn, d.w.z. met de hoogte van het parallelepipedum op **a**, **b** en **c** bechreven. Het scalartripelproduct is dus juist de inhoud van het parallelepipedum op **a**, **b** en **c** beschreven en wel met een positief teken, als **c** met $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ een scherpe hoek maakt.
Blijkbaar is:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \,.\, \mathbf{c}.$$

Door uit te gaan van een ander zijvlak als grondvlak vinden wij ook, dat:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c} &= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \,.\, \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \,.\, \mathbf{b} = \\ &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \,.\, \mathbf{c} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \,.\, \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Wij kunnen het scalartripelproduct ook uitdrukken in de kentallen van **a**, **b** en **c**:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \,.\, (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}].$$

Het is dus gelijk aan de determinant, gevormd door de 9 kentallen van de drie vectoren. Ook hieruit blijken de bovengenoemde relaties, in het bijzonder de tekenwisseling bij verandering van de volgorde van de drie vectoren.

Door het vectoriële product te vormen van de vectoren $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ ontstaat het vectortripelproduct $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

Deze vector heeft de volgende eigenschappen:

1) Hij staat loodrecht op $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, dus loodrecht op de loodlijn op het vlak van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$, hij moet dus in het vlak van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ liggen.
2) Hij staat loodrecht op $\mathbf{c}$.

Uit (1) volgt, dat hij een lineaire combinatie is van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \lambda\, \mathbf{a} + \mu\, \mathbf{b}.$$

Uit (2) volgt, dat het scalaire product met $\mathbf{c}$ nul moet zijn:

$$(\lambda\, \mathbf{a} + \mu\, \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c} = \lambda(\mathbf{a} \,.\, \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{b} \,.\, \mathbf{c}) = 0.$$

Hieruit volgt dat wij kunnen schrijven:

$$\lambda = \nu\, (\mathbf{b} \,.\, \mathbf{c})$$
$$\mu = -\nu\, (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{c}),$$

zodat:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \nu\{(\mathbf{b} \,.\, \mathbf{c})\, \mathbf{a} - (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{c})\mathbf{b}\}.$$

Daar de waarde van het linkerlid evenredig is met de lengten van $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ en ditzelfde geldt voor elk van de termen van het rechterlid, kan ν niet meer van $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ afhangen; ν moet dus een getallenfactor zijn, die wij kunnen bepalen door voor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ een speciale keuze te maken.

Kies $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$ en $\mathbf{c} = \mathbf{i}$. Dan ontstaat enerzijds:

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

en anderzijds:

$$\nu\{(\mathbf{j} \,.\, \mathbf{i})\mathbf{i} - (\mathbf{i} \,.\, \mathbf{i})\mathbf{j}\} = -\nu\, \mathbf{j},$$

zodat $\nu = -1$ en wij vinden:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{b} \,.\, \mathbf{c})\, \mathbf{a}.$$

Meetkundig is deze eigenschap op de volgende wijze in te zien. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ is een vector, die loodrecht staat op het vlak door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ en tot grootte heeft $a\, b \sin \varphi$, als wij de lengten van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ door a en b en hun hoek met φ aanduiden.

Laat nu $\mathbf{c}'$ (lengte c') de projectie van $\mathbf{c}$ op het vlak door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ zijn, dan moet $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ een vector zijn, die in dat vlak loodrecht op $\mathbf{c}'$ staat en

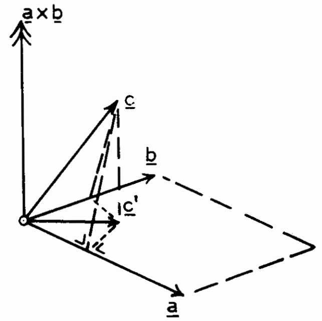

Fig. 15.

de lengte $a\, b\, c' \sin \varphi$ heeft. Wij noemen de hoeken, waarin $\mathbf{c}'$ de hoek tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ verdeelt, φ_1 en φ_2 en ontbinden de vector $a\, b\, c' \sin \varphi$ in componenten langs $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$, die wij aanduiden met $- \lambda\, \mathbf{a}$ en $\mu\, \mathbf{b}$.

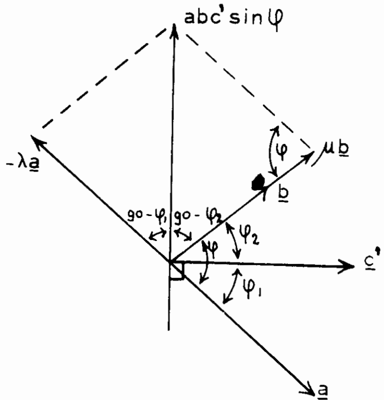

Fig. 16.

Dan geeft toepassing van de sinusregel:

$$\frac{a\, b\, c' \sin \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\lambda\, a}{\sin\,(90 - \varphi_2)} = \frac{\mu\, b}{\sin\,(90 - \varphi_1)}\,,$$

ofwel:

$$\lambda = b\, c' \cos \varphi_2$$

en:

$$\mu = a\, c' \cos \varphi_1.$$

Maar $c' \cos \varphi_2$ is de projectie van $\mathbf{c}'$ op $\mathbf{b}$, dus ook de projectie van $\mathbf{c}$ op $\mathbf{b}$, zodat:

$$\lambda = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

en evenzo:

$$\mu = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

Het resultaat is dus:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b}.$$

Tenslotte is het resultaat ook door directe berekening te verifiëren:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \times \mathbf{c} =$$

$$= \{(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}\} \times$$
$$\times\ (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_2b_3 - a_3b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (c_3a_3b_1 - c_3a_1b_3 - c_2a_1b_2 + c_2a_2b_1)\mathbf{i} +$$
$$+ (c_1a_1b_2 - c_1a_2b_1 - c_3a_2b_3 + c_3a_3b_2)\mathbf{j} +$$
$$+ (c_2a_2b_3 - c_2a_3b_2 - c_1a_3b_1 + c_1a_1b_3)\mathbf{k} =$$
$$= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1\ \mathbf{i} - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_1\ \mathbf{i} +$$
$$+ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2\ \mathbf{j} - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_2\ \mathbf{j} +$$
$$+ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,b_3\mathbf{k} - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_3\,\mathbf{k} =$$
$$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}.$$

Door toepassing van de formules voor vector- en scalartripelproduct vinden wij voor het product van vier vectoren **a**, **b**, **c** en **d**:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \{\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\} \cdot \mathbf{a} =$$
$$= \{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{d}\} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

In het bijzonder is:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

Verder geldt:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}\}\,\mathbf{c} - \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\}\,\mathbf{d} =$$
$$= [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]\ \mathbf{c} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\ \mathbf{d} = (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) =$$
$$= [\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}]\ \mathbf{b} - [\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{b}]\ \mathbf{a}.$$

7. *Toepassingen op de meetkunde in de ruimte.*

De normaal **n** op het vlak, opgespannen door de vectoren **a** en **b** heeft de richting van het vectorproduct **a** $\times$ **b**. Daar een willekeurige vector **r** in dat vlak loodrecht op **n** moet zijn, moet gelden $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{r} = 0$. Dit stelt dus, met lopende vector **r**, de vergelijking voor van het vlak door de oorsprong met richtingsvectoren **a** en **b**. Is $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, dan is de vergelijking ook te schrijven:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

De vergelijking van het vlak door het punt **p** met richtingsvectoren **a** en **b** is evenzo $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,.\, (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = 0$.
Meestal geven wij de normaalvector **n** op het vlak de lengte 1. Zijn zijn richtingsgetallen l, m en n, dan geldt dus:

$$\mathbf{n} \,.\, \mathbf{n} = l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Voor het vlak, opgespannen door **a** en **b**, geldt dus:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}\,.$$

Wij kunnen de vergelijking van het vlak door **p** bij gegeven **n** dus ook schrijven als $\mathbf{n} \,.\, (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = 0$. De afstand van een punt **q** tot dit vlak is gelijk aan de projectie van de vector $\mathbf{r} - \mathbf{q}$ op de normaal. Zij is dus gegeven door:

$$d = (\mathbf{r} - \mathbf{q}) \,.\, \mathbf{n} = \mathbf{r} \,.\, \mathbf{n} - \mathbf{q} \,.\, \mathbf{n} = \mathbf{p} \,.\, \mathbf{n} - \mathbf{q} \,.\, \mathbf{n} = (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \,.\, \mathbf{n},$$

daar **n** de lengte 1 heeft. De afstand van een punt **q** tot een lijn $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda\, \mathbf{a}$, waarbij **p**, **q** en **a** gegeven vectoren zijn, wordt gevonden uit het vectorproduct $(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times \mathbf{a}$.

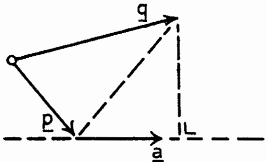

Fig. 17.

De oppervlakte van dit vectorproduct is n.l. gelijk aan $a\,d$, zodat wij vinden:

$$d = \frac{|(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times \mathbf{a}|}{a}\,.$$

Is de richtingsvector **a** een eenheidsvector, dan is:

$$d = |(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times \mathbf{a}|\,.$$

Tenslotte bepalen wij de afstand van twee kruisende lijnen:

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda\, \mathbf{a}$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + \mu\, \mathbf{b}.$$

Deze afstand is de lijn, die de beide lijnen onder rechte hoeken snijdt. Haar richting is dus de richting van het vectorproduct $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ van de richtingsvectoren **a** en **b**.

De parameterwaarden λ_s en μ_s van de snijpunten worden bepaald uit de voorwaarde, dat de verbindingsvector:

$$\mathbf{p} - \mathbf{q} + \lambda_s \mathbf{a} - \mu_s \mathbf{b}$$

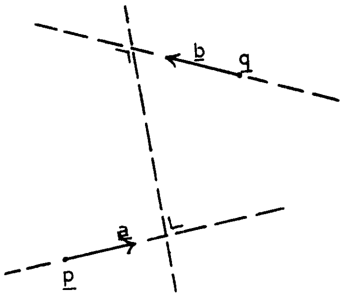

Fig. 18.

dezelfde richting heeft als dit vectoriële product. Er is dus een coëfficient ν, zodat:

$$\mathbf{p} - \mathbf{q} + \lambda_s \mathbf{a} - \mu_s \mathbf{b} = \nu(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Om ν te bepalen, vormen wij het scalaire product met $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
Daar $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ loodrecht op $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ staan, is:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0,$$

zodat:

$$(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nu(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Dus:
$$\nu = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}.$$

Om λ_s te bepalen, vormen wij het scalaire product met de vector $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}$, die loodrecht staat op $\mathbf{b}$ en op $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}\} + \lambda_s \mathbf{a} \cdot \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}\} = 0.$$

Nu is:

$$\mathbf{a} \cdot \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}\} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

volgens de regel van het scalartripelproduct, zodat:

$$\lambda_s = -\frac{\{(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times \mathbf{b}\} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}.$$

Vermenigvuldigen met de vector $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$, die loodrecht staat op $\mathbf{a}$ en op $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, geeft:

$$\mu_s = -\frac{\{(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times \mathbf{a}\} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}.$$

De afstand is gelijk aan de projectie van de verbindingsvector $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ op $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$d = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

8. *Vraagstukken.*

1. Als $(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}$ bewijs dan, dat $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ loodrecht staat op $\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$.
2. Als $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, bewijs dan, dat $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ en interpreteer het resultaat meetkundig. (september 1960, januari 1961).
3. Bewijs, dat $\{\mathbf{d} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$. (september 1960).
4. Bewijs, dat $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{d}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = -2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\ \mathbf{d}$. (september 1961).
5. Bewijs, dat $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2$. (januari 1961).
6. Los de onbekende vector $\mathbf{x}$ op uit de vergelijking $\beta\mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{c}$; hierin is β een scalaire constante $(\beta \neq 0)$, $\mathbf{a}$ en $\mathbf{c}$ zijn constante vectoren. (december 1964).
7. Laat zien, dat het vlak door de punten $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ en $\mathbf{r}_3$ de vergelijking heeft $[\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3] + [\mathbf{r}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1] + [\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]$.